Interrogation n°3 – Relations binaires (sujet A)

Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit E un ensemble et $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Soit A une partie de E. Que doit vérifier un élément M pour être un majorant de A ? et pour être le maximum de A ? Cf cours.

2. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par $a\mathcal{R}b \iff a-b$ est pair. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ en termes de quantificateurs pour être une relation d'équivalence ? Montrer les deux premières propriétés (les plus simples). Pour l'écriture

   des trois propriétés en termes de quantificateurs, cf cours. Attention à bien remplacer E par $\mathbb{Z}$!

   — Montrons la réflexivité. Soit $a \in \mathbb{Z}$. $a\mathcal{R}a \iff a-a$ est pair $\iff$ 0 est pair. Or, 0 est clairement pair. Ainsi, $a\mathcal{R}a$ (est vrai). Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

   — Montrons la symétrie. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose $a\mathcal{R}b$, i.e. $a-b$ pair. Montrons $b\mathcal{R}a$, i.e. $b-a$ pair. Comme $a-b$ est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a-b = 2k$. Alors, $b-a = 2(-k) = 2k'$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$. D'où $b-a$ est pair. Ainsi, $b\mathcal{R}a$ est vrai. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

3. Pour la relation $\mathcal{R}$ de la question précédente, on note $\overline{0}$ la classe d'équivalence de 0. Quelle est la définition de $\overline{0}$ en termes d'ensemble ? Déterminer ensuite $\overline{0}$. $\overline{0} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 0\mathcal{R}y\}$

   On a

$$\begin{aligned} y \in \overline{0} &\iff 0\mathcal{R}y \\ &\iff y\mathcal{R}0 \\ &\iff y-0 \text{ est pair} \\ &\iff y \in 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc $\overline{0} = 2\mathbb{Z}$.

Interrogation n°3 – Relations binaires (sujet B)
Corrigé

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$. On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Donner la définition de $\overline{x}$ en termes d'ensemble. Que peut-on dire des classes d'équivalence de E ? $\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$

   Les classes d'équivalences de E forment une partition de E.

2. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}$ par $x \preceq y \iff e^{-x} \leq e^{-y}$. Que doit vérifier $\preceq$ en termes de quantificateurs pour être une relation d'ordre ? Montrer les deux premières propriétés (les plus simples). Pour l'écriture des

   trois propriétés en termes de quantificateurs, cf cours. Attention à bien utiliser la notation $\preceq$ et non $\mathcal{R}$! Et de même, remplacer E par $\mathbb{R}$.

   — Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $x \preceq x \iff e^{-x} \leq e^{-x}$. Or, $e^{-x} \leq e^{-x}$ est trivialement vrai. Donc $x \preceq x$. Ainsi, $\preceq$ est réflexive.

   — Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose $x \preceq y$ et $y \preceq x$, i.e. $e^{-x} \leq e^{-y}$ et $e^{-y} \leq e^{-x}$. On a donc

   $$\begin{aligned} e^{-y} = e^{-x} &\implies -y = -x \\ &\implies y = x \end{aligned}$$

   donc $\preceq$ est antisymétrique.

3. Pour la relation de la question précédente, on pose $A = [0, 1]$. Que doit vérifier un réel M pour être le maximum de A ? Déterminer ce maximum. M doit vérifier : $\begin{cases} \forall x \in A \quad x \preceq M \\ M \in A \end{cases}$

Soit $x \in A$. On a :

$$\begin{aligned} & x \preceq M \\ \iff & e^{-x} \leq e^{-M} \\ \iff & -x \leq -M \qquad \text{par croissance de } \ln \\ \iff & x \geq M \end{aligned}$$

D'où M doit vérifier : $\begin{cases} \forall x \in A \quad x \geq M \\ M \in A \end{cases}$. On remarque que $M = 0$ convient trivialement. Ainsi, le maximum recherché est 0.